

**Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Національний університет цивільного захисту України
Кафедра автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Начальник кафедри АСБтаІТ

Роман ШЕВЧЕНКО

Навчальна дисципліна

**АВТОМАТИКА РАННЬОГО ВИЯВЛЕННЯ НАДЗВИЧАЙНИХ
СИТУАЦІЙ**

Лекція № 5

**ПОНЯТТЯ СТІЙКОСТІ АС. МАТЕМАТИЧНІ ОЗНАКИ СТІЙКОСТІ
АС. АЛГЕБРАЇЧНИЙ КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ ГУРВІЦА. ВИЗНАЧЕННЯ
МЕЖІ СТІЙКОСТІ. ДІАГРАМА ВИШЕГРАДСЬКОГО**

Лекцію розробив:
Доцент кафедри АСБтаІТ

Вячеслав ДУРЄЄВ

ХАРКІВ 2024

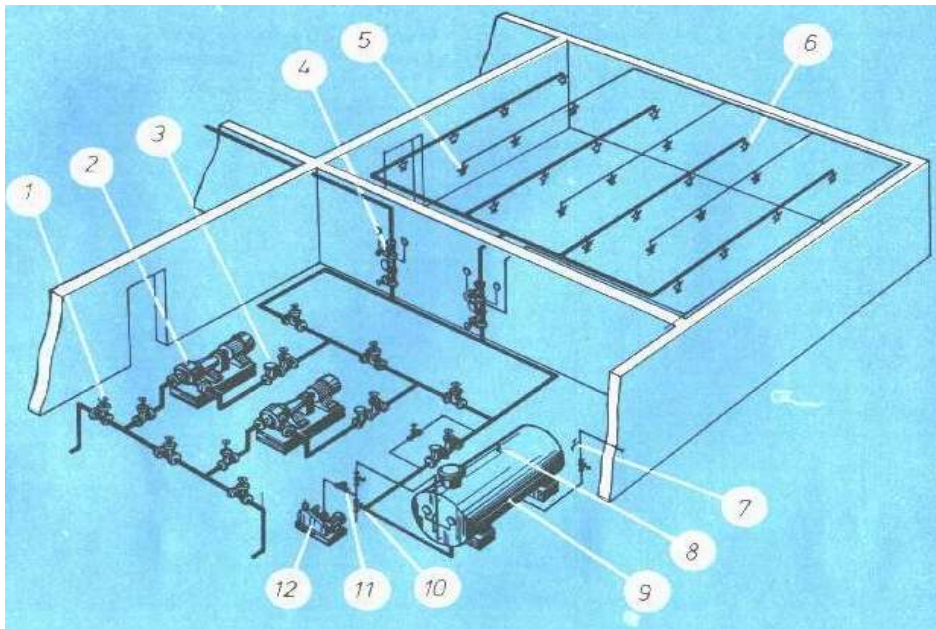
Зміст лекції:

Вступ

- 1 Поняття стійкості АС.
- 2 Математичні умови стійкості АС.
- 3 Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца.
- 4 Визначення границі стійкості за критерієм Гурвіца.
5. Висновки, урахування впливу воєнного стану.

Вступ

В четвертій лекції, на прикладі АУВПП, було показано математичне вираження складових елементів та пристроїв. Сьогодні розглянемо, як математично оцінити їх сумісну роботу у складі АУВПП.



1 Поняття стійкості АС.

Система вважається **стійкою**, якщо будучи виведеної зі стану рівноваги вона знову повертається в цей стан після припинення дії збурювання, яке вивело систему з рівноваги.

Якщо після припинення дії збурювання система не повертається у вихідний стан, але і відхилення при цьому не збільшуються, то така система називається **нейтральною** (знаходиться на границі стійкості).

Якщо після припинення дії збурювання відхилення системи від рівноважного стану продовжує збільшуватися, то така система називається **хитливою**.

У ТАУ розглядаються тільки стійкі АС, що здатні вирішувати поставлені задачі з заданою точністю.

2 Математичні умови стійкості АС.

Щоб досліджувати стійкість математичної моделі АС необхідно покласти рівному нулю сигнал зовнішнього впливу $\bar{X}(t) = 0$ й досліджувати поведінку вихідного сигналу $\bar{y}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Якщо $\bar{y}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, то це означає, що система стійка.

Якщо $\bar{y}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} const$, то це означає, що система нейтральна.

Якщо $\bar{y}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, то це означає, що система нестійка.

Нехай динаміка АС описується ЛДУ загального виду:

$$a_0 \bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_j \bar{y}^{(n-j)} + \dots + a_{n-1} \dot{\bar{y}} + a_n \bar{y} = b \bar{x}.$$

Тоді поведінку системи при нульовому зовнішньому впливі буде описуватися лінійним однорідним рівнянням:

$$a_0 \bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_j \bar{y}^{(n-j)} + \dots + a_{n-1} \dot{\bar{y}} + a_n \bar{y} = 0$$

Загальне рішення однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t},$$

де: n – порядок ЛДР; p_i – корінь характеристичного рівняння;

C_i – постійні інтегрування, обумовлені з початкових умов.

Із загального рішення однорідного рівняння видно, що

$$\bar{y}_i(t) = c_i e^{p_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \text{ якщо } p_i < 0.$$

У загальному випадку частина корінь характеристичного рівняння комплексно сполучені:

$$p_i = \alpha_i \pm i \omega_i.$$

Для кожної пари комплексно сполучених корінь рішення шукається у вигляді:

$$\bar{y}_i(t) = C_{1i} e^{(\alpha_i + i \omega_i)t} + C_{2i} e^{(\alpha_i - i \omega_i)t}$$

Дійсне рішення буде мати вигляд:

$$\bar{y}_i(t) = e^{\alpha_i t} \cdot (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

$$\text{або } \bar{y}_i(t) = C_i e^{\alpha_i t} \cdot \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

Видно, що $\bar{y}_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, якщо $\alpha_i < 0$.

Висновок: необхідною й достатньою умовою стійкості АС є запереченість речовинних частин всіх корінь характеристичного рівняння.

Якщо хоча б одне з речовинних корінь позитивний або позитивна дійсна частина мнимого кореня, то

$\overline{y}_i(t) = c_i e^{p_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, що свідчить про нестійкість АС.

Граничному стану АС відповідає наявність одного нульового кореня. При цьому якщо нулю дорівнює дійсний корінь, то система перебуває на границі аперіодичної стійкості, а якщо нулю дорівнює дійсна частина уявного кореня, то система перебуває на границі коливальної стійкості.

Довідка. У випадку кратних коріння рішення ДУ шукається у вигляді:

$$\overline{y}_i(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_m t^{m-1}) e^{p_i t},$$

де m-кратність i-го кореня. Якщо $p_i < 0$, то $\overline{y}_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ й АС буде стійкою.

Для випадку кратного нульового кореня рішення ДУ варто шукати у вигляді:

$$\overline{y}_i(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_m t^{m-1}, \text{ де m-кратність нульового кореня.}$$

Якщо $m=1$, то $\overline{y}_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c_i$ й система є нейтральною.

Якщо $m>1$, то $\overline{y}_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ й система є нестійкою

Зауваження: реальні АС описуються нелінійними ДУ.

В 1892р. Ляпуновим було доведено:

1. Якщо лінійна модель АС стійкий, то стійко й вихідна нелінійна АС.
2. Якщо лінійна модель АС нестійкий, то нестійко й вихідна нелінійна АС.
3. Якщо лінійна модель АС нейтральний, то про стійкість вихідної нелінійної АС нічого сказати не можна. Потрібні додаткові дослідження.

3 Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца.

При дослідженні лінійних АС на стійкість найбільші труднощі представляє визначення коріння характеристичного рівняння. Для рівнянь вище 4-го порядку це завдання аналітично взагалі вирішене бути не може. Тому були розроблені критерії, що дозволяють побічно судити про знаки коріння характеристичного рівняння. Одним з найпоширеніших критеріїв є алгебраїчний критерій Гурвіца, який в 1895р. довів, що лінійна АС із характеристичним рівнянням загального виду:

$$a_0 p^n + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_j p^{(n-j)} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

стійка, якщо при $a_0 > 0$, позитивні всі визначники Гурвіца.

Визначники Гурвіца складаються за допомогою квадратної матриці $n \times n$:

$$\begin{array}{c|cccccc|cc}
 \Delta_1 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \Delta_2 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \Delta_3 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \Delta_4 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\
 \Delta_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\
 \Delta_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n
 \end{array} = \Delta_n$$

Нулями в матриці заповнюються вільні місця.

Довідка. Нехай є визначник Δ_n загального виду в якому i -номер рядка, k -номер стовпця.

1. Мінором M_{ik} визначника Δ_n називають визначник Δ_{n-1} , отриманий з Δ_n викреслюванням i -й рядка й k -го стовпця.

2. Під алгебраїчним доповненням A_{ik} елемента a_{ik} розуміють мінор M_{ik} помножений на $(-1)^{i+k}$

Теорема розкладання визначника Δ_n по елементах рядка або стовпця:

По елементах рядка $\Delta_n = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$; по елементах стовпця: $\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$

А) Умови стійкості системи 1-го порядку.

Характеристичне рівняння: $a_0 p + a_1 = 0$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 = a_1 > 0$. Отже, достатньою умовою стійкості АС 1-го порядку є позитивність коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Б) Умови стійкості системи 2-го порядку.

Характеристичне рівняння:

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0$ і $\Delta_2 > 0$.

1. $\Delta_1 = a_1 > 0$.

2. $\Delta_2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot 0 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 > 0$.

Отже, достатньою умовою стійкості АС 2-го порядку є позитивність коефіцієнтів характеристичного рівняння.

В) Умови стійкості системи 3-го порядку.

Характеристичне рівняння:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$.

$$1. \Delta_1 = a_1 > 0.$$

$$2. \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3.$$

$$3. \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \Delta_2 \cdot a_3.$$

З умови 3 треба, щоб $a_3 > 0$, тоді аналізуючи умову 2, неминуче дійдемо висновку, що $a_2 > 0$, і разом з тим $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

Отже: АС 3-го порядку є стійкою, якщо при позитивності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння добуток середніх коефіцієнтів більше добутку крайніх: $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

4 Визначення границі стійкості за критерієм Гурвіца.

Часто потрібно визначити область параметрів у якій у якій система стійка. Для цього необхідно знати границю стійкості. Система знаходиться на границі стійкості якщо серед коренів характеристичного рівняння мається один нульовий корінь (границя аперіодичної стійкості) чи один комплексно-сполучений корінь з нулевою дійсною частиною. Цій умові відповідає рівність нулю останнього визначника Гурвиця:

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} = 0.$$

Якщо: $\Delta_{n-1} > 0$, $a_n = 0$ – АС на границі **аперіодичної** стійкості.

Якщо: $\Delta_{n-1} = 0$, $a_n > 0$ – АС на границі **коливальної** стійкості.

Алгебраїчний критерій стійкості Гурвиця дозволяє аналітично досліджувати стійкість АС будь-якого порядку. Однак з підвищенням порядку АС обчислення стають досить громіздкими, що вимагає застосування сучасних ЕОМ.

Висновки:

На лекції було розглянуто поняття стійкості та критерії по яким вона визначається.

Завдання на самопідготовку:

1. Теорія автоматичного управління. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Н.І. Бурау, Д.О. Півторак; КПП ім. Ігоря Сікорського, 2021. – С 50-51.

https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42076/1/TAU_praktykum.pdf

5. Висновки, урахування впливу воєнного стану.

Застосування методів аналізу стійкості автоматичних систем для дослідження режимів роботи зразків військового озброєння.

Зміна положення елеронів, що визначає положення військового літака в польоті по тангажу та крену, формується пристроями, динаміка яких визначається диференціюючими та форсуючими ланками.



Визначення стійкості їх роботи може проводитися методами, що представлені в даній лекції, а саме за критерієм стійкості Гурвиця, якщо математична модель, що описує роботу автоматику літака є системою першого, другого чи третього порядку.

Згідно висновків отриманих в лекції приводи елеронів літака будуть працювати в штатному режимі, якщо коефіцієнти, що описують інерційність роботи таких приладів будуть мати позитивне значення, що цілком відповідає суті конструкції механізмів автоматики положення літака.

Таким чином, питання що розглянуті в даній лекції актуальні як для аналізу роботи систем протипожежного захисту, так і для зразків військового озброєння.