

**Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Національний університет цивільного захисту України
Кафедра автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Начальник кафедри АСБтаІТ

Роман ШЕВЧЕНКО

Навчальна дисципліна

**АВТОМАТИКА РАННЬОГО ВИЯВЛЕННЯ НАДЗВИЧАЙНИХ
СИТУАЦІЙ**

Лекція № 4

Елементарні динамічні ланки та їх класифікація.
Перехідні характеристики динамічних ланок.

Лекцію розробив:

Доцент кафедри АСБтаІТ



Вячеслав ДУРЕСОВ

ХАРКІВ 2024

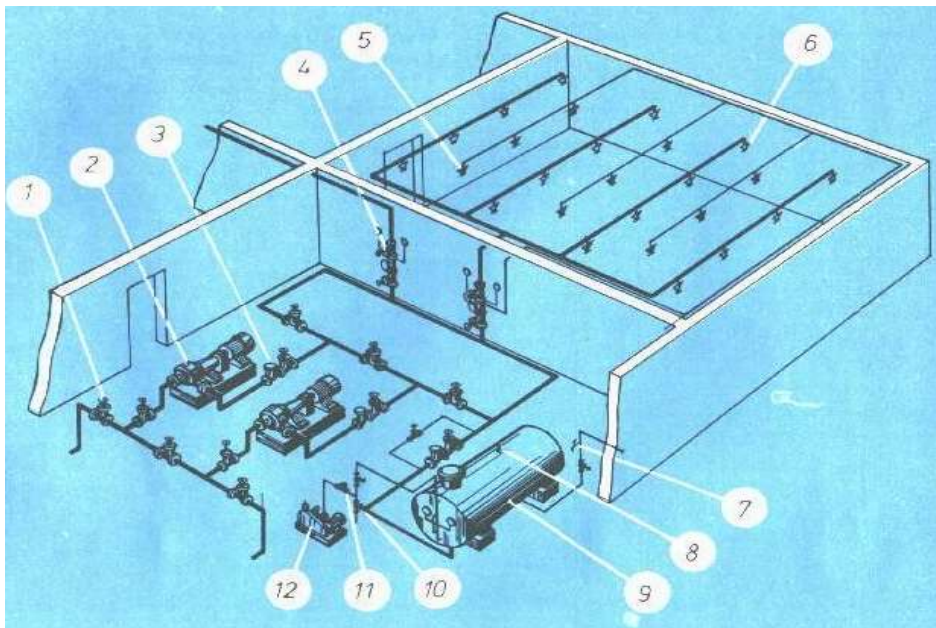
Зміст лекції:

Вступ

1. Перехідні характеристики позиційних ланок.
 - 1.1. Ідеальна позиційна ланка.
 - 1.2. Реальна позиційна ланка.
 - 1.3. Позиційна ланка другого порядку.
2. Перехідні характеристики інтегруючих ланок.
 - 2.1. Ідеальна інтегруюча ланка.
 - 2.2. Реальна інтегруюча ланка.
3. Перехідні характеристики ланок, що диференціюють.
 - 3.1. Ідеальна ланка, що диференціює.
 - 3.2. Реальна ланка, що диференціює..
4. Частотні характеристики позиційних ланок.
5. Частотні характеристики інтегруючих ланок.
6. Частотні характеристики ланок, що диференціюють.
7. Висновки, урахування впливу воєнного стану.

Вступ

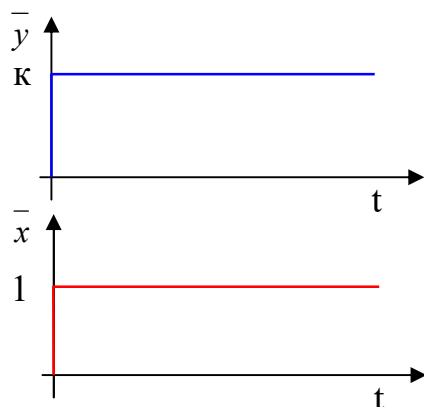
В третій лекції, на прикладі АУВПП, були показані основні типи сигналів, що діють в пожежній АС. Сьогодні на занятті ми розглянемо, як можна математично виразити елементи та пристрої АУВПП.



1. Перехідні характеристики позиційних ланок.

1.1. Ідеальна позиційна ланка.

Ричаг датчика рівня вогнегасної речовини. Переміщення кінця перемістить інший кінець



Рівняння динаміки:

$$\bar{y} = K \cdot \bar{x}; \quad W(p) = K.$$

Ланка миттєво відтворює вхідний сигнал, посилений у "K" раз.

1.2. Реальна позиційна ланка.

Пожежний насос. Вхідний сигнал оберти від приводу, вихідний сигнал витрата води.

Рівняння динаміки, ПФ:

$$T \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot x(t); \quad W(p) = \frac{K}{Tp + 1}.$$

Знайдемо перехідну функцію, при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

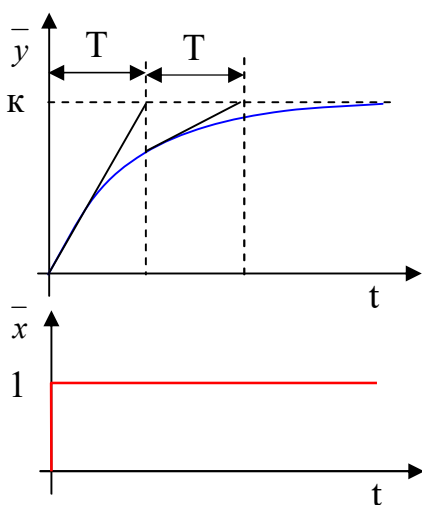
Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{K}{Tp + 1} \cdot X(p) = \frac{K}{Tp + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Перехідна характеристика являє собою експоненту.



Особливості ПХ:

1. Графік перехідного процесу являє собою експоненту.
2. Величина проекції дотичної на лінію сталого режиму дорівнює постійної часу T.
3. Тривалість перехідного процесу t_r , час за який вихідний сигнал досягає 95% нового

сталого значення визначається постійної часу: $t_r = 3T$.

Дійсно: $0,95K = K - K \cdot e^{-\frac{t_r}{T}}$, отже $e^{-\frac{t_r}{T}} = 0,05$ или $e^{\frac{t_r}{T}} = 20$.

Прологарифмуємо:

$$\frac{t_r}{T} = \ln 20 \approx 3 \Rightarrow t_r = 3T$$

Довідка. Для заданої умови $\bar{x} = 1(t)$ рівняння динаміки прийме вид: $T \dot{\bar{y}} + \bar{y} = K$
Рішення лінійного диференціального рівняння шукається у вигляді:
 $\bar{y}(t) = \bar{y}_{oo} + \bar{y}_{час}$.

Загальне однорідне рішення має вигляд: $\bar{y}_{oo} = C \cdot e^{pt}$, де p – корінь характеристичного рівняння,

C – постійна інте-

грування, обумовлена з початкових умов.

Приватне рішення в цьому випадку має вигляд правої частини: $\bar{y}_{час} = K$

Характеристичне рівняння ДУ: $TP + 1 = 0$, отже $p = -\frac{1}{T}$

Одержимо: $\bar{y}(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{T}} + K$.

Постійну «3» знайдемо з початкових умов: $\bar{y}(0) = C \cdot e^{-\frac{t_0}{T}} + K$, отже $0 = C + K$, звідки $C = -K$.

Остаточно одержимо: $\bar{y}(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$.

1.3. Позиційна ланка 2-го порядку.

Пожежний насос. Вхідний сигнал оберти від приводу, вихідний сигнал витрата води. Ураховуються динамічні процеси, пов'язані з тертям та перетіканням вогнегасної речовини.

Рівняння динаміки, ПФ:

$$T^2 \ddot{y} + 2dT \dot{y} + y = Kx; \quad W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dT p + 1}.$$

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$; $\ddot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dT p + 1} \cdot X(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dT p + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$

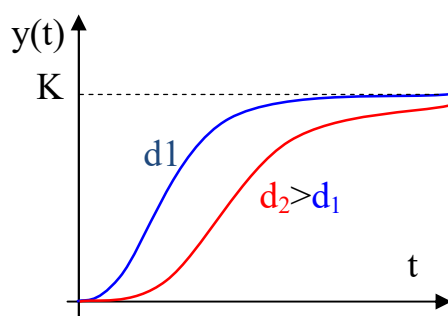
З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

1) Декремент загасання $d \geq 1$.

Корені характеристичного рівняння дійсні негативні: $p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 1}{T^2}}$

Позначимо: $T_1 = -\frac{1}{p_1}$; $T_2 = -\frac{1}{p_2}$.

Представимо ПФ у виді: $W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)} = \frac{K}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 p + 1}$.



Рішення ДУ має вид:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Перехідна характеристика складається з двох експонент і відповідно до характеру перехідного процесу називається аперіодичної

Особливості ПХ: 1. $\dot{y}(0) = 0$.

2. Мається крапка перегину.

3. Тривалість перехідного процесу залежить не тільки від постійної часу, але і від величини декременту загасання.

Довідка. У випадку дійсних коренів характеристичного рівняння рішення ДУ має вид:

$$y(t) = y_{oo}(t) + y_{чAC}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + K = C_1 e^{\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{\frac{t}{T_2}} + K$$

Значення 3_1 , 3_2 визначаються з початкових умов: при $t=0$, $\bar{y}(0) = 0$; $\dot{\bar{y}}(0) = 0$; $\ddot{\bar{y}}(0) = 0$.

$$\dot{y}(t) = \frac{C_1}{T_1} e^{\frac{t}{T_1}} + \frac{C_2}{T_2} e^{\frac{t}{T_2}}; \begin{cases} C_1 + C_2 + K = 0 \\ -\frac{C_1}{T_1} - \frac{C_2}{T_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = K \frac{T_1}{T_2 - T_1}; \quad C_2 = -K \frac{T_2}{T_2 - T_1}.$$

Остаточно одержимо: $y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{\frac{t}{T_2}} \right)$.

2) Декремент загасання $d < 1$

Корені характеристичного рівняння комплексно-сполучені:

$$p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm j \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} = -\alpha \pm j\omega.$$

Рішення ДУ має вид:

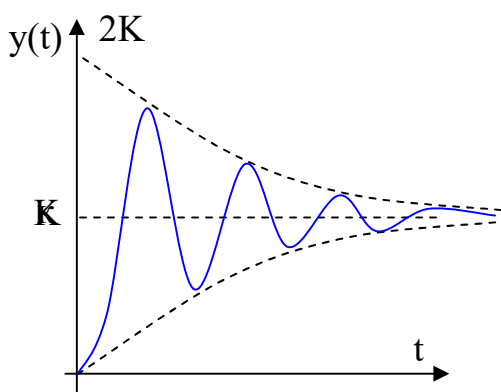
$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T/d}} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right).$$

Позначимо: $T_{ог} = \frac{T}{d}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} \quad - \text{ власна частота коливань [рад/с],}$$

$$\phi = \arctg \sqrt{\frac{1-d^2}{d^2}} \quad - \text{ зрушення фази [рад].}$$

Одержимо спрощений запис: $y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T_{ог}}} \cdot \sin(\omega t + \phi) \right)$



Особливості ПХ:

1. Перехідний процес буде коливальним. У рішенні ДУ мається гармонійна складова.

2. Графік розташовується між двома обгинаючими. Обгинаючі є експонентою з постійної часу: $T_{ог} = \frac{T}{d}$.

3. Час τ_R можна приблизно оцінити за постійною часу обгинаючої.

$$t_R = 3T_{ог} = \frac{3T}{d}.$$

4.3 $\downarrow d$, $\tau_R \uparrow$. При $d=0$ коливання взагалі не загасають.

Така ланка називається **"консервативною"** (ідеальний маятник).

Довідка. У випадку комплексно-сполучених коренів: $p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm i \cdot \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} = -\alpha \pm i\omega$.

Загальне рішення ДУ шукається у виді: $\bar{y}_{OO} = C_1 e^{(-\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\omega)t}$.

Для того щоб одержати рішення в дійсній формі скористаємося правилом. Якщо ДУ з дійсними коефіцієнтами має комплексне рішення:

$$y(t) = U(t) + iV(t),$$

то кожна з цих функцій $U(t)$ і $V(t)$ є рішенням цього ДУ.

По формулі Ейлера: $e^{(-\alpha+i\omega)t} = e^{-\alpha t} \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t + i \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega t = U(t) + iV(t)$.

Тоді відповідно до правила функції $U(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t$; и $V(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$,

є рішенням вихідного ДУ. Знаючи дві частки рішення, можна побудувати загальне рішення:

$$y_{OO} = C_1 U(t) + C_2 V(t) = e^{-\alpha t} \cdot (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Позначимо: $C_1 = A \sin \phi$; и $C_2 = A \cos \phi$.

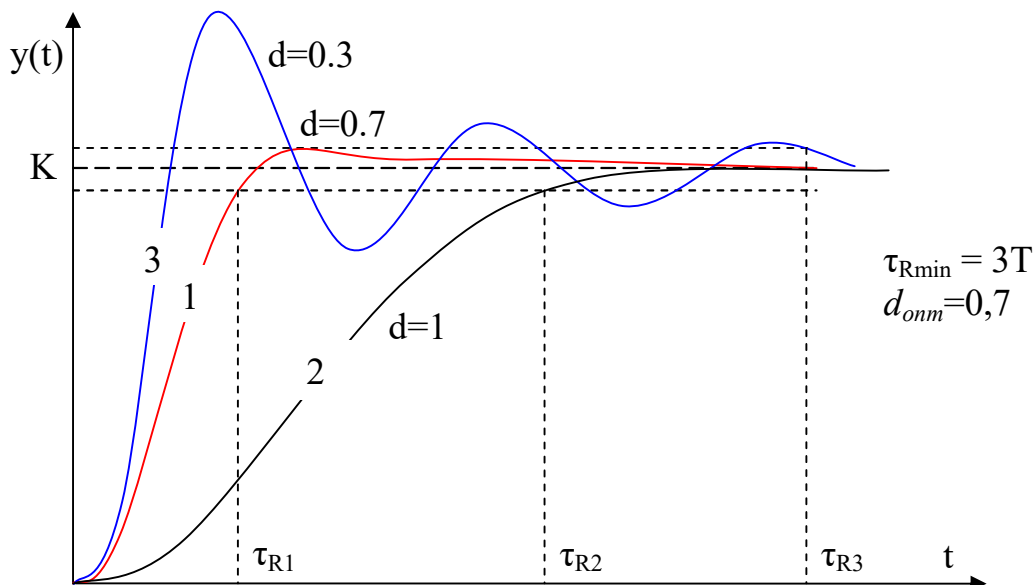
Одержимо: $y_{OO} = e^{-\alpha t} \cdot (A \sin \phi \cos \omega t + A \cos \phi \sin \omega t) = A e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \phi)$.

З начальных умов визначаються єдині значення z_1, z_2 чи A, ϕ .

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \phi = \arctg \frac{C_1}{C_2}.$$

А.Ф. Берман, И.Г. Араманович. Короткий курс математичного аналізу. М., Наука, 1971, стор.591.

На наступному рисунку показаний вплив декременту загасання d на тривалість перехідних процесів ланки 2-го порядку. Мінімальний час перехідного процесу відповідає декременту загасання $d=0,7$.



Висновок. Для забезпечення мінімального часу перехідного процесу сучасні АС проектуються з незначної коливальності перехідних процесів.

2. Перехідні характеристики інтегруючих ланок.

2.1. Ідеальна інтегруюча ланка.

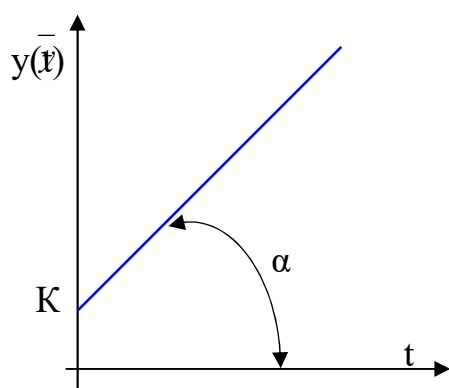
Датчик рівня вогнегасної речовини: вхідний сигнал витрата рідини, вихідний сигнал - рівень рідини.

Рівняння динаміки, ПФ: $T \dot{y}(t) = Kx(t); \quad W(p) = \frac{K}{Tp}.$

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}.$

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0.$

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{1}{Tp} \cdot \frac{1}{p}.$$



З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t) = \frac{K}{T} t.$$

Особливості ПХ:

Перехідна характеристика представляє собою пряму лінію з кутом нахилу:

$$\alpha = \arctg \frac{K}{T}.$$

Довідка. Це найбільш просте ДУ, його рішення має вид:

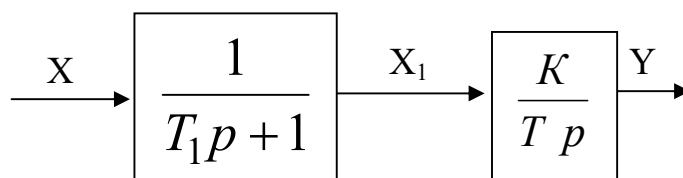
$$y(t) = \frac{K}{T} \int_0^t x(t) \cdot dt = \frac{K}{T} \int_0^t dt = \frac{1}{T} t.$$

2.2. Реальна інтегруюча ланка.

перспективна пожежна АС

Рівняння динаміки: $T_1 T \ddot{y}(t) + T \dot{y}(t) = Kx(t).$

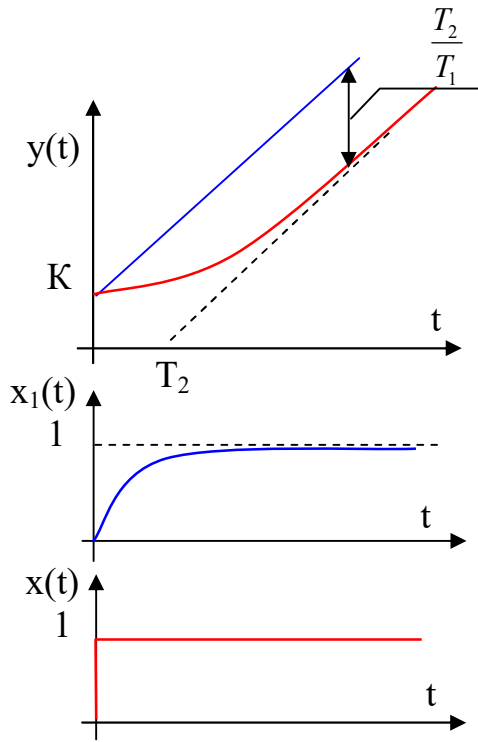
Реальну інтегруючу ланку можна представити у виді послідовного з'єднання інерційної і ідеальної інтегруючої ланок.



Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}.$

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0.$

$$Y(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) X(p) = \frac{K}{Tp} \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot X(p) = \frac{K}{T p} \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$



Знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t) = \frac{K}{T} t - \frac{T_1}{T} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Особливості ПХ:

1. При $t \rightarrow \infty$: $e^{-\frac{t}{T_1}} \rightarrow 0$.

$$y(t) \approx \frac{K}{T} t - \frac{T_1}{T}$$

2. Перехідна характеристика реальної інтегруючої ланки відрізняється від ідеальної ланки

на величину $\Delta y = -\frac{T_1}{T}$.

Це відставання вносить інерційна ланка.

Довідка. Перехідна функція першої ланки відома: $\bar{x}_1 = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}$. Тоді для другої ланки одержимо:

$$y = \frac{K}{T_1} \int_0^t (1 - e^{-\frac{t}{T_2}}) dt = \frac{K}{T_1} \left(t + T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)_0^t = \frac{K}{T_1} (t + T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} - T_2) = \frac{K}{T_1} t - \frac{T_2}{T_1} (1 - e^{-\frac{t}{T_2}}).$$

3. Перехідні характеристики ланок, що диференціюють.

3.1. Ідеальна ланка, що диференціює.

Ідеальний вимірник швидкості.

Рівняння динаміки: $y(t) = K \dot{x}(t)$.

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

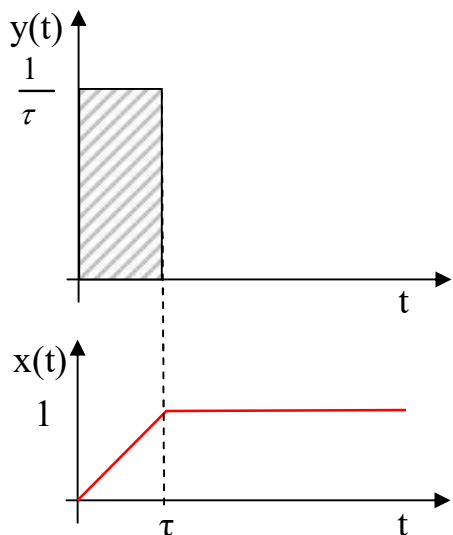
$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = Kp \cdot X(p) = Kp \cdot \frac{1}{p} = K.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$\bar{y} = K \cdot \delta(t).$$

Перехідна характеристика являє собою імпульс площею "K".

Щоб зрозуміти перехідну характеристику ідеальної диференціюючої ланки, розглянемо не східчастий сигнал впливу, а сигнал з деяким нахилом, приблизно вважаючи його східчастим.



$$y(t) = \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\tau}$$

У цьому випадку імпульс дорівнює по величині $\frac{1}{\tau}$, а площа імпульсу дорівнює:

$$S = \tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1.$$

При $\tau \rightarrow 0$, перехідна характеристика прагне до дельта функції $\delta(t)$:

$$l'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \dot{x}(t) = \delta(t).$$

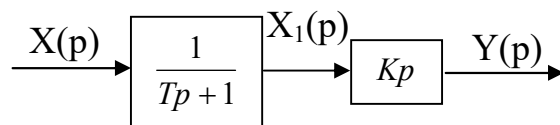
Відповідно: $\int_0^t \delta(t) dt = l(t).$

3.2. Реальна ланка, що диференціює.

Реальний вимірник швидкості

Рівняння динаміки: $T \dot{y}(t) + y(t) = K \dot{x}(t).$

Реальна ланка, що диференціює, можна представити у виді послідовного з'єднання інерційного позиційної й ідеальної диференціюючої ланок.

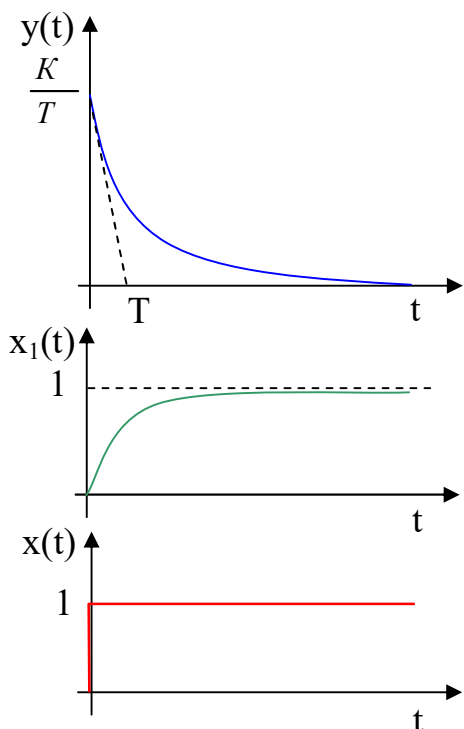


Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = l(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = Kp \frac{1}{Tp + 1} X(p) = \frac{Kp}{Tp + 1} \frac{1}{p}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:



$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Особливості ПХ:

1. Перехідна характеристика являє собою експоненту.

2. При $t=0$ $y(0) = \frac{K}{T}$

3. Чим менше постійна часу інерційного запізнювання T , тим ближче реальна ланка до ідеальної.

4. Процес експоненціальний, час перехідного процесу: $t_R = 3T$.

Довідка. $x_1 = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$

$$\Rightarrow y(t) = K \dot{x}(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

4 Частотні характеристики позиційних ланок.

4.1. Ідеальна позиційна ланка

А) АФЧХ ідеальної позиційної ланки.

Передаточна функція: $W(P) = K$.

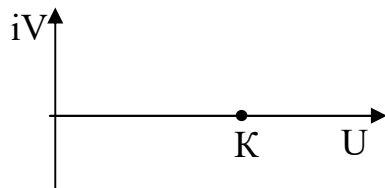
Частотна функція: $W(i\omega) = K$.

Дійсна частина частотної функції: $U(\omega) = K$.

Уявна частина частотної функції: $V(\omega) = 0$.

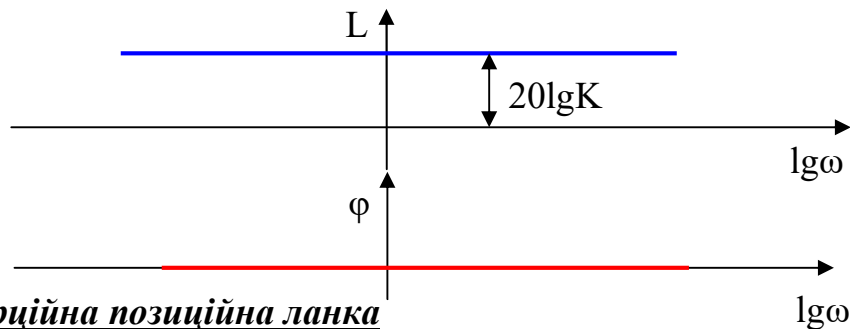
Модуль вектора А: $A(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2} = K$.

Зрушення фази: $\phi(\omega) = \arctg \left(\frac{V}{U} \right) = 0$.



АФЧХ являє собою точку K на позитивній дійсній вісі комплексної площини.

Б) ЛЧХ ідеальної позиційної ланки: $L = 20 \lg A = 20 \lg K$; $\phi(\omega) = 0$.



4.2. Інерційна позиційна ланка

А) АФЧХ Інерційної позиційної ланки.

Передаточна функція: $W(P) = \frac{K}{T_P P + 1}$.

Частотна функція: $W(i\omega) = \frac{K}{Ti\omega + 1} \cdot \frac{1 - Ti\omega}{1 - Ti\omega} = \frac{K - iKT\omega}{1 + T^2\omega^2}$.

Дійсна частина частотної функції: $U(\omega) = \frac{K}{1 + T^2\omega^2}$.

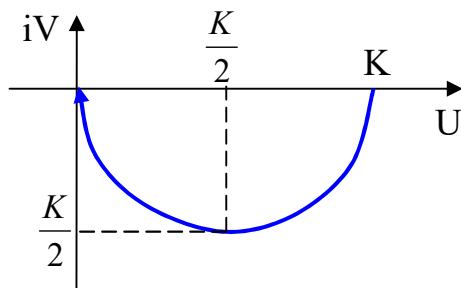
Уявна частина частотної функції: $V(\omega) = -\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}$.

Модуль вектора А: $A(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$.

Зрушення фази: $\phi(\omega) = \arctg \left(\frac{V}{U} \right) = \arctg (-T\omega)$.

Поводження вектора АФЧХ:

ω	U	V	A	φ
0	K	0	K	0
1/T	$\frac{K}{2}$	$\frac{K}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$
∞	0	0	0	$-\pi/2$



АФЧХ представляє собою напів-
кругність, яка знаходиться впродовж
дійсної вісі в 4-му квадранті.

Б) ЛЧХ інерційної позиційної ланки.

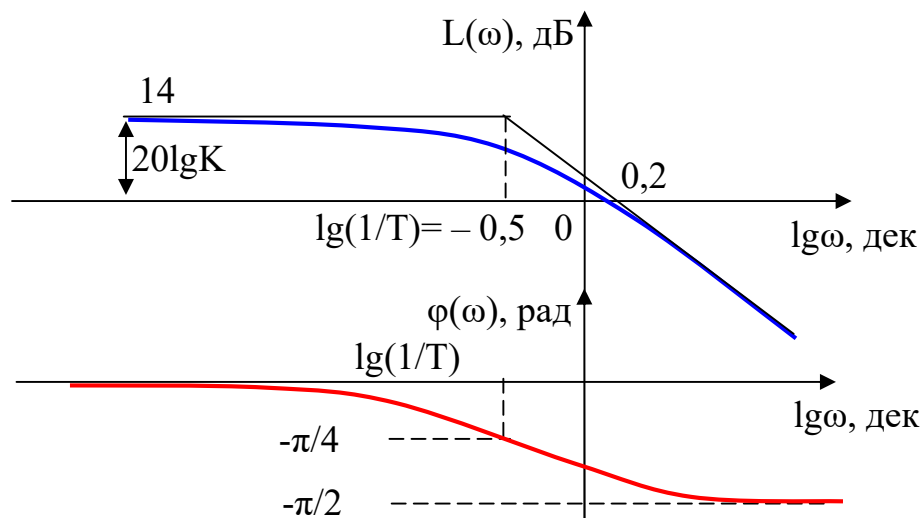
$$L = 20 \lg A = 20 \lg \left(\frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \right) = 20 \lg K - 10 \cdot \lg(1 + T^2 \omega^2)$$

Дану залежність можна представити у виді двох асимптот $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$.

При $\omega \rightarrow 0$: $T^2 \omega^2 \rightarrow 0$; $\Rightarrow L_1(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 5 = 14$, (дБ) – горизонт. пряма.

При $\omega \rightarrow \infty$: під знаком логарифма можна враховувати тільки найбільший ступінь: $T^2 \omega^2 \rightarrow \infty$; $\Rightarrow L_2(\omega) = -20 \lg T \omega$ – асимптота $L_2(\omega)$ у логарифмічних координатах – пряма лінія з кутом нахилу -20 дБ/дек.

У точці $\omega = 1/T$ асимптоти перетинаються $L_1(\omega) = L_2(\omega)$.



Висновок: представлення ЛЧХ у виді асимптот дозволяє виконати побудову без трудомістких обчислень, при цьому максимальна помилка в точці сполучення не перевищує 3 дБ.

$$\Delta L = L_1 - L = 20 \lg K - (20 \lg K - 10 \lg(1 + T^2 \omega^2)) = 10 \lg 2 \approx 3 \text{ дБ}$$

4.3. Позиційна ланка 2-го порядку.

А) АФЧХ позиційної ланки 2-го порядку

Передаточна функція:
$$W(P) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dT p + 1}.$$

Частотна функція:

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 2dTj\omega + 1} = \frac{K}{(1-T^2\omega^2) + 2dTj\omega} \cdot \frac{(1-T^2\omega^2) - 2dTj\omega}{(1-T^2\omega^2) - 2dTj\omega};$$

$$W(j\omega) = \frac{K(1-T^2\omega^2) - 2KdTj\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4(dT\omega)^2}.$$

Дійсна частина частотної функції:
$$U(\omega) = \frac{K(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4(dT\omega)^2}$$

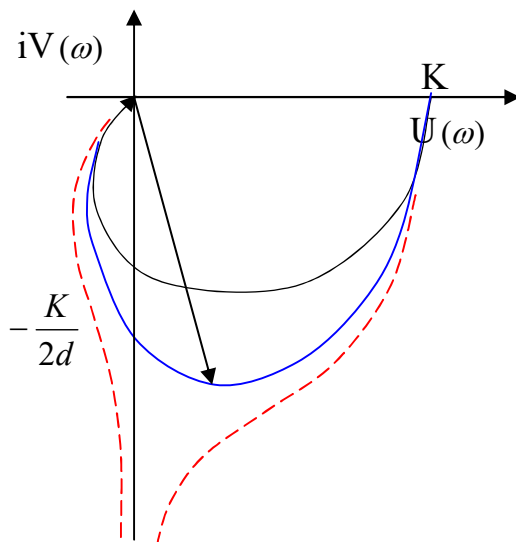
Уявна частина частотної функції:
$$V(\omega) = -\frac{2KdT\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4(dT\omega)^2}.$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4(dT\omega)^2}}.$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) = \arctg \left(-\frac{2dT\omega}{1-T^2\omega^2} \right).$$

Поводження вектора АФЧХ:

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	K	0	K	0
1/T	0	$-\frac{K}{2d}$	$\frac{K}{2d}$	$-\frac{\pi}{2}$
∞	0	0	0	$-\pi$



АФЧХ являє собою криву, розташовану уздовж дійсної осі в 3-му і 4-му квадранті. При $d \geq 1$ модуль плавно зменшується.

При $d < 1$ спостерігається резонанс:

$$A = A_{\max} \text{ при } \omega = \frac{\sqrt{1-d^2}}{T}$$

При $d=0$ АФЧХ терпить розрив.

Б) ЛЧХ позиційної ланки 2-го порядку

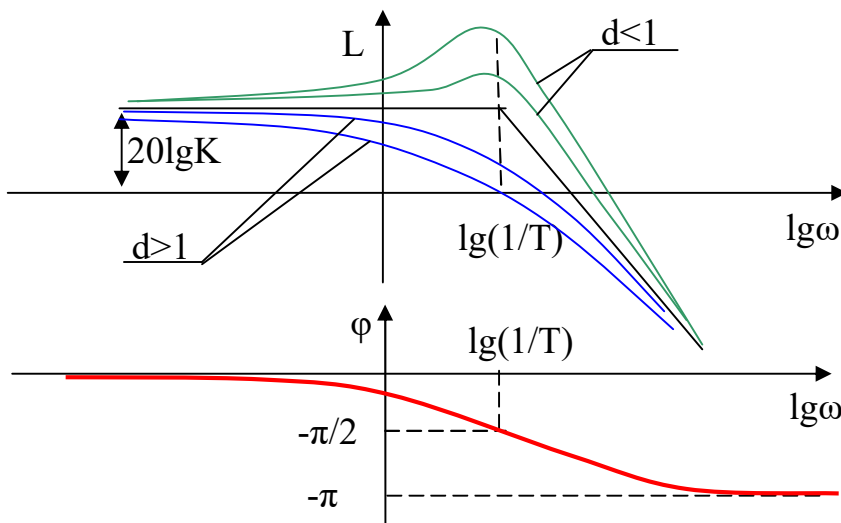
$$L = 20 \lg A = 20 \lg \left(\frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4(dT\omega)^2}} \right) = 20 \lg K - 10 \lg((1 - T^2 \omega^2)^2 + 4(dT\omega)^2)$$

Дану залежність можна представити у виді двох асимптот L_1 і $L_2 = L_\Sigma$.

При $\omega \rightarrow 0$: $T^2 \omega^2 \rightarrow 0$; $T^4 \omega^4 \rightarrow 0$; $\Rightarrow L_1 = 20 \lg K$ – пряма лінія.

При $\omega \rightarrow \infty$: під знаком логарифма можна враховувати тільки найбільший ступінь: $T^4 \omega^4 \rightarrow \infty$; $\Rightarrow L^2 = -40 \lg T\omega$ – лінія з кутом нахилу -40дБ/дек .

У точці $\lg(1/T)$ асимптоти перетинаються $L_1 = L_2$.



Висновок: представлення ЛЧХ у виді асимптот дозволяє виконати побудову без трудомістких обчислень. Максимальна помилка залежить від декременту загасання і буде в точці сполучення.

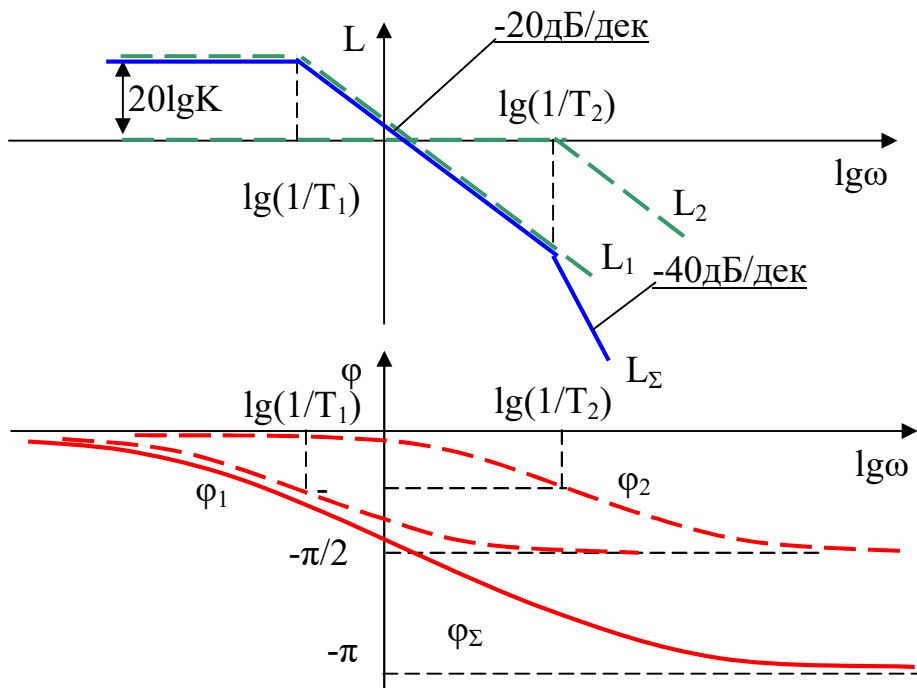
$$\Delta L = L_1 - L = 20 \lg K - (20 \lg K - 10 \lg((1 - T^2 \omega^2)^2 + 4(dT\omega)^2)) = 20 \lg(4d)$$

Примітка: ЛЧХ аперіодичної ланки 2-го порядку ($d > 1$) можна представити у вигляді асимптот з помилкою не більше 3дБ, скориставшись правилом додавання ЛЧХ. Для аперіодичної ланки характеристичний поліном можна розкласти по коріннях характеристичного рівняння й передатну функцію представити у вигляді:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dTp + 1} = \frac{K}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)} = W_1 \cdot W_2$$

Тоді відповідно до правила додавання:

$$L_\Sigma = L_1 + L_2; \quad \varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2.$$



5. Частотні характеристики інтегруючих ланок.

5.1. Ідеальна інтегруюча ланка.

$$T \dot{y}(t) = x(t); \quad 0,1 \dot{y}(t) = x(t)$$

А) АФЧХ ідеальної інтегруючої ланки.

Передаточна функція: $W(p) = \frac{1}{Tp} = \frac{1}{0,1p}$.

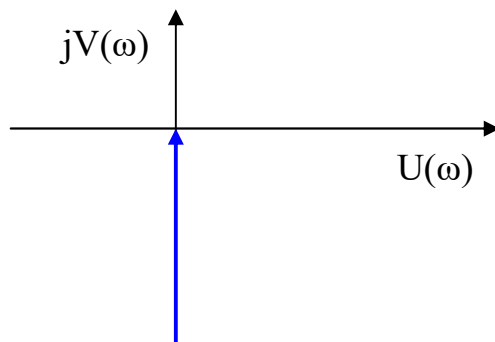
Частотна функція: $W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{T\omega} = -\frac{j}{0,1\omega}$.

Дійсна частина частотної функції: $U(\omega) = 0$.

Уявна частина частотної функції: $V(\omega) = -\frac{1}{T\omega} = -\frac{1}{0,1\omega}$.

Модуль вектора А: $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{1}{T\omega} = \frac{1}{0,1\omega}$.

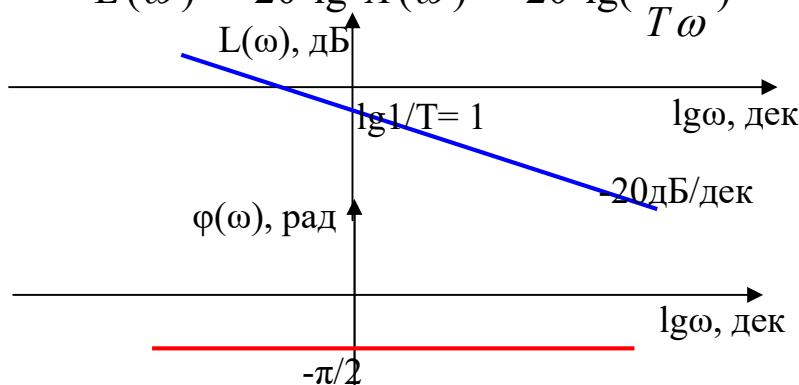
Зрушення фази: $\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) = -\frac{\pi}{2}$.



АФЧХ являє собою вектор співпадаючий з негативною уявною віссю, що закінчується на початку координат.

Б) ЛЧХ ідеальної інтегруючої ланки

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left(\frac{1}{T\omega} \right) = -20 \lg T\omega = -20 \lg 0,1\omega$$



Логарифмічна амплітудна характеристика являє собою пряму лінію з кутом нахилу -20 дБ/дек, що перетинає вісь абсцис у крапці $\lg(1/T)$.

5.2. Реальна інтегруюча ланка.

$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) = x(t)$$

А) АФЧХ реальної інтегруючої ланки.

Передаточна функція: $W(p) = \frac{1}{T_1 T_2 p^2 + T_1 p} = \frac{1}{T_1 p} \cdot \frac{1}{T_2 p + 1}$.

Частотна функція:

$$W(j\omega) = \frac{1}{-T_1 T_2 \omega^2 + T_1 j\omega} \cdot \frac{-T_1 T_2 \omega^2 - T_1 j\omega}{-T_1 T_2 \omega^2 - T_1 j\omega} = \frac{-T_1 T_2 \omega^2 - T_1 j\omega}{(T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}$$

Дійсна частина частотної функції: $U(\omega) = \frac{-T_1 T_2 \omega^2}{(T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}$.

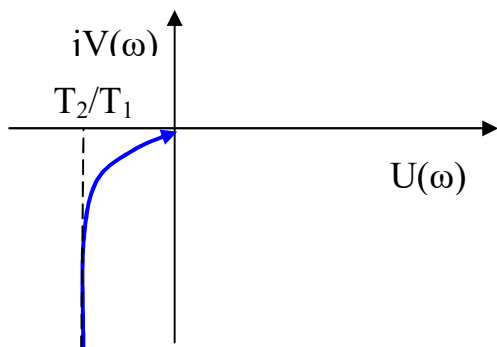
Уявна частина частотної функції: $V(\omega) = \frac{-T_1 \omega}{(T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}$.

Модуль вектора $A(\omega)$: $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{1}{T_1 \omega \cdot \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}$.

Зрушення фази: $\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) = \arctg -\frac{1}{T_2 \omega}$.

Поводження вектора АФЧХ:

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	$-\frac{T_2}{T_1}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$
∞	0	0	0	$-\pi$



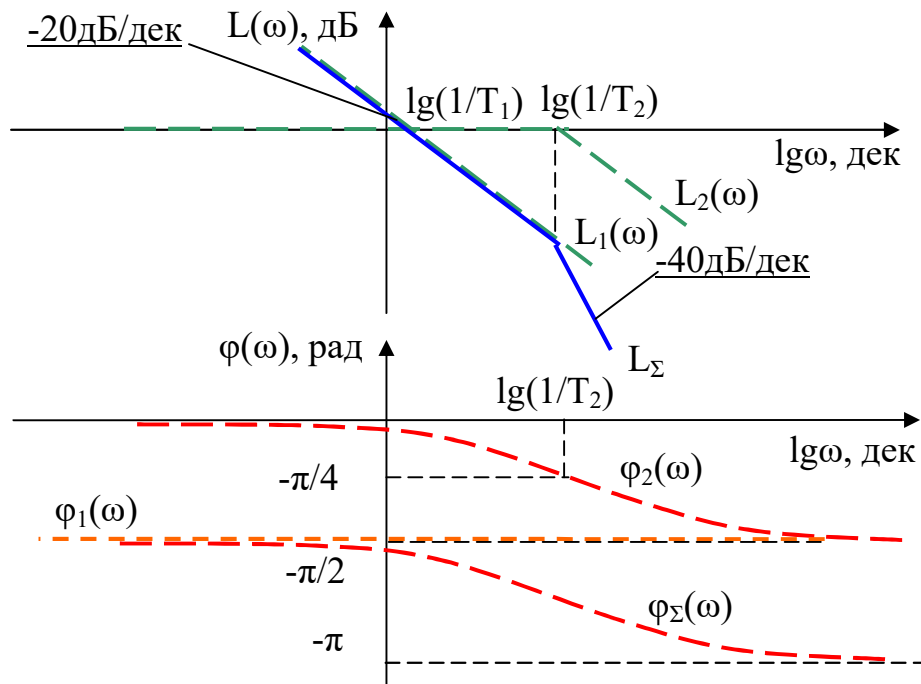
АФЧХ являє собою криву, яка знаходиться в третьому квадранті та яка закінчується в початку координат.

Б) ЛЧХ реальної інтегруючої ланки

ЛЧХ реальної інтегруючої ланки легко одержати користаючись правилом додавання ЛЧХ. З цією метою представимо передатну функцію інерційного інтегруючого ланки у виді:

$$W(p) = \frac{1}{T_1 p} \cdot \frac{1}{T_2 p + 1} = W_1(p) \cdot W_2(p).$$

$$\Rightarrow L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega); \quad \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$



6. Частотні характеристики ланок, що диференціюють.

6.1. Ідеальна ланка, що диференціює.

$$y(t) = K \dot{x}(t)$$

А) АФЧХ ідеальної диференціюючої ланки.

Передаточна функція: $W(P) = Kp$.

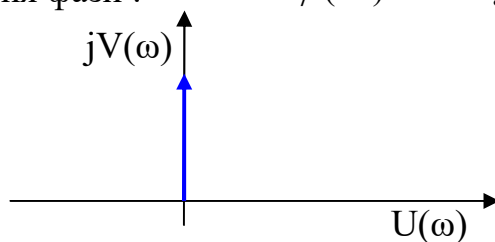
Частотна функція: $W(j\omega) = Kj\omega$.

Дійсна частина частотної функції: $U(\omega) = 0$.

Уявна частина частотної функції: $V(\omega) = K\omega$.

Модуль вектора А: $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = K\omega$.

Зрушення фази: $\phi(\omega) = \arctg \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) = +\frac{\pi}{2}$.

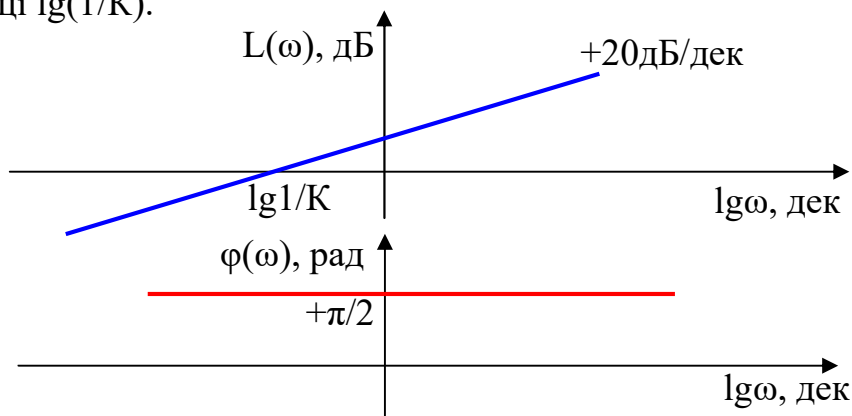


АФЧХ являє собою вектор, що співпадає з позитивною уявною віссю.

Б) ЛЧХ ідеальної диференціюючої ланки.

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg(K\omega)$$

ЛЧХ являє собою пряму лінію з кутом нахилу +20дБ/дек, що перетинає вісь абсцис у крапці $\lg(1/K)$.



6.2. ІНЕРЦІЙНА (РЕАЛЬНА) ДИФЕРЕНЦІЮЮЧА ЛАНКА

$$T \dot{y}(t) + y(t) = K \dot{x}(t)$$

А) АФЧХ реальної диференціюючої ланки.

Передаточна функція: $W(P) = Kp \cdot \frac{1}{Tp + 1}$

Частотна функція: $W(j\omega) = Ki\omega \cdot \frac{1}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{1 - Tj\omega}{1 - Tj\omega} = \frac{KT\omega^2 + Kj\omega}{1 + T^2\omega^2}$

Дійсна частина частотної функції: $U(\omega) = \frac{KT\omega^2}{1 + T^2\omega^2}$

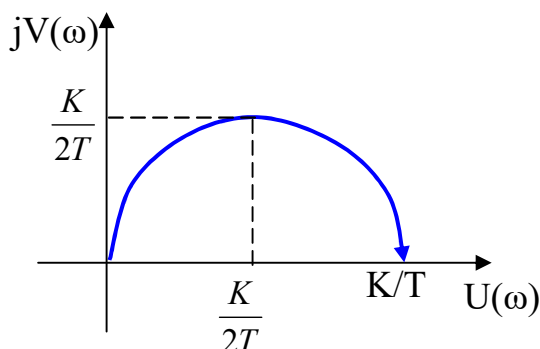
Уявна частина частотної функції: $V(\omega) = \frac{K\omega}{1 + T^2\omega^2}$

Модуль вектора А: $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{K\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$

Зрушення фази: $\phi(\omega) = \arctg\left(\frac{V}{U}\right) = \arctg\left(\frac{1}{T\omega}\right)$

Поводження вектора АФЧХ:

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$A(\omega)$	$\phi(\omega)$
0	0	0	0	$+\pi/2$
$1/T$	$K/2T$	$K/2T$	$\frac{K}{T\sqrt{2}}$	$+\pi/4$
∞	K/T	0	K/T	0



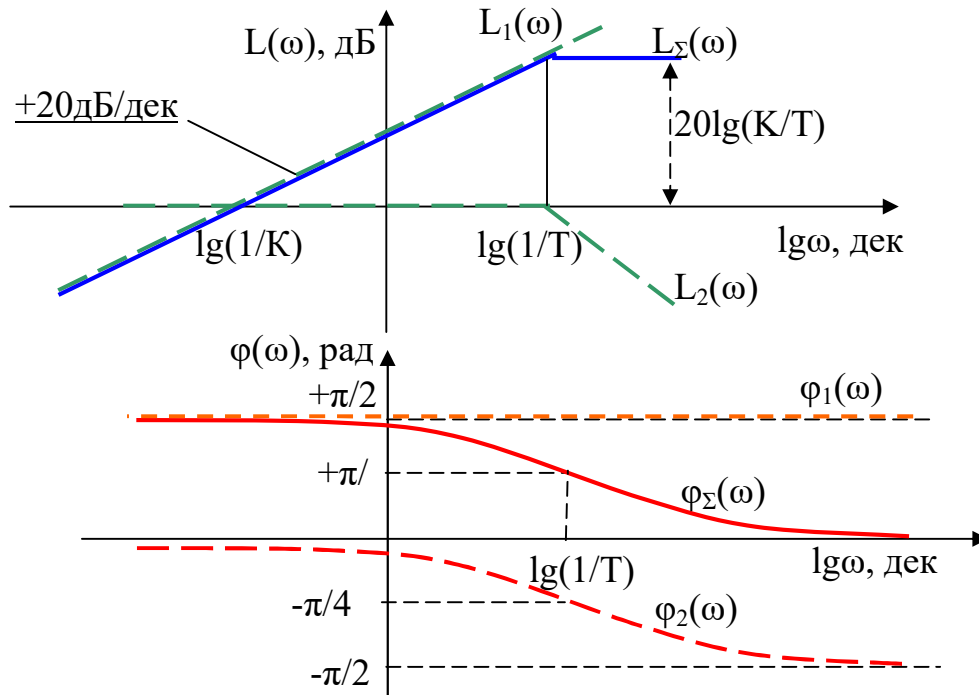
АФЧХ являє собою напівокружність, яка знаходиться в першому квадранті та закінчується в точці K/T на дійсній вісі.

Б) ЛЧХ інерційної диференціюючої ланки

ЛЧХ інерційної ланки, що диференціює, легко одержати користаючись правилом додавання ЛЧХ. З цією метою представимо передатну функцію інерційної диференціюючої ланки у виді:

$$W(p) = Kp \cdot \frac{1}{Tp + 1} = W_1(p) \cdot W_2(p);$$

$$\Rightarrow L(p) = L_1(p) + L_2(p); \quad \varphi(p) = \varphi_1(p) + \varphi_2(p).$$



6.3. Ланка, що форсує.

$$y(t) = KT \dot{x}(t) + Kx(t) = K \left(T \dot{x}(t) + x(t) \right).$$

А) АФЧХ ланки, що форсує.

Передатна функція: $W(P) = K \cdot (Tp + 1).$

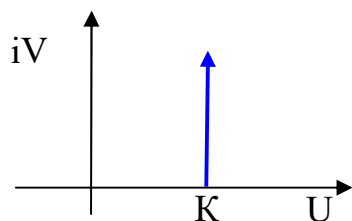
Частотна функція: $W(i\omega) = K \cdot (Ti\omega + 1) = K + KTi\omega.$

$$U(\omega) = K; \quad V(\omega) = KT\omega.$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2} = K \sqrt{1 + T^2 \omega^2}; \quad \phi(\omega) = \arctg \left(\frac{V}{U} \right) = \arctg (+T\omega).$$

Поводження вектора АФЧХ:

ω	U	V	A	ϕ
0	K	0	K	0
1/T	K	K	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$+\pi/4$
∞	K	∞	∞	$+\pi/2$



АФЧХ являє собою вектор, який знаходиться в першому квадранті, паралельний уявній вісі на координаті K .

Б) ЛЧХ ланки, що форсує.

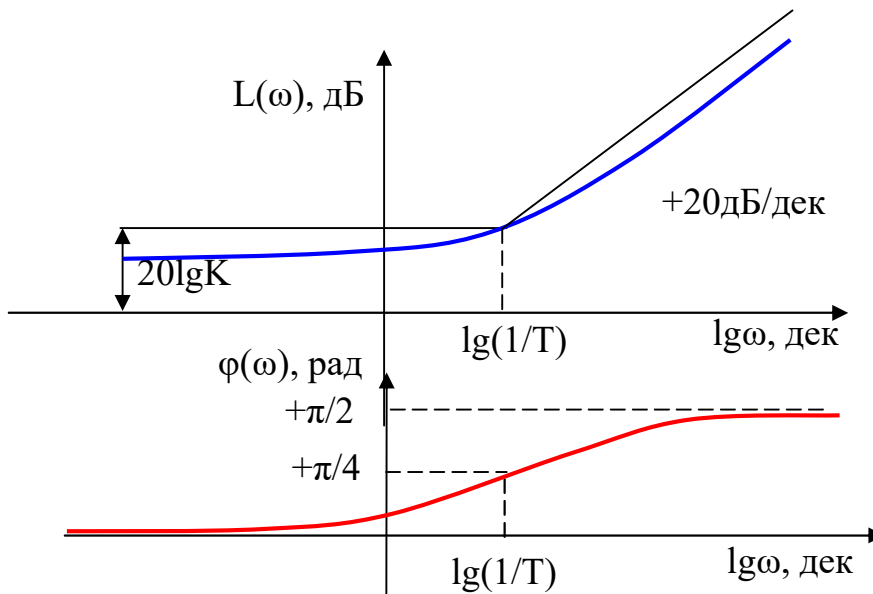
$$L = 20 \lg A = 20 \lg \left(K \cdot \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \right) = 20 \lg K + 10 \cdot \lg(1 + T^2 \omega^2)$$

Дану залежність можна представити у виді двох асимптот $L_1(\omega)$ і $L_2(\omega)$.

При малих ω : $\omega \rightarrow 0$; $T^2 \omega^2 \rightarrow 0$; $\Rightarrow L_1(\omega) = 20 \lg K$.

При великих ω враховуємо найбільший ступінь:
 $T^2 \omega^2 \rightarrow \infty$; $\Rightarrow L_2(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg T \omega$

У крапці $\lg(1/T)$ асимптоти перетинаються $L_1(\omega) = L_2(\omega)$.



Максимальна помилка в точці сполучення не перевищує 3дБ.

$$\Delta L(\omega) = L(\omega) - L_1(\omega) = (20 \lg K + 10 \lg(1 + T^2 \omega^2)) - 20 \lg K = 10 \lg 2 \approx 3 \text{ дБ}$$

7. Висновки, урахування впливу воєнного стану.

Математичний опис елементів військового озброєння характеристиками динамічних ланок.

Елементи військового озброєння та системи його функціонування можуть бути змодельовані та описані з урахуванням їх властивостей як динамічних ланок. Так позиційна ланка першого порядку $T \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot x(t)$ описує роботу як системи протипожежного захисту, так і авіаційного двигуна військового літака.



Вхідним сигналом такої моделі двигуна є витрата палива, вихідним сигналом системи управління авіаційного двигуна виступає частота обертання ротора.

В свою чергу, позиційна ланка другого порядку

$$T^2 \ddot{y} + 2dT \dot{y} + \bar{y} = K\bar{x}$$

моделює роботу авіаційного двигуна з урахуванням його маси, геометрії та впливу сил тертя з урахуванням перетікання авіаційного палива в двигуні.

Інтегруючи ланки дозволяють моделювати зміну рівня палива, з вхідним сигналом подачі палива і вихідним сигналом витрати палива. При цьому реаль-

на інтегруюча ланка $T_1 T \ddot{y}(t) + T \dot{y}(t) = Kx(t)$ дозволяє моделювати перспективну систему контролю палива в авіаційному двигуні військового літака.

Особливістю протікання бойових дій в протистоянні України проти збройної агресії РФ, є широке застосування безпілотних літальних апаратів та бойових FPV-дронів.



Швидкість FPV-дрону та його положення в просторі (тангаж, крен, нишпорення) можуть бути визначені за допомогою ланок, що диференціюють:

- ідеальна ланка $y(t) = K \dot{x}(t)$ – ідеальний датчик швидкості та положення FPV-дрону у просторі;

- реальна ланка $T \dot{y}(t) + y(t) = K \dot{x}(t)$ – реальний датчик швидкості та положення FPV-дрону у просторі. Крім того, саме застосування ланки що диференціює дозволяє контролювати положення елеронів в польоті військового літака.

Завдання на самопідготовку:

1. Теорія автоматичного управління. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Н.І. Бурау, Д.О. Півторак; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – С 11-12.

https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42076/1/TAU_praktykum.pdf

Наименование звена	Передаточная функция W(p)	Переходная функция	Переходная характеристика	АФЧХ	ЛЧХ
Идеальное позиционное звено	K	K			
Реальное позиционное звено	$\frac{K}{Tp + 1}$	$K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$			
Позиционное звено 2го порядка	$\frac{K}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$ $\frac{K}{Tp^2 + 2dTp + 1}$	$K \left[1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$ $K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \right]$ $\omega = \frac{\sqrt{1-d^2}}{T}; \alpha = \arctg \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$			
Идеальное интегрирующее звено	$\frac{1}{Tp}$	$\frac{1}{T} \cdot t$			
Реальное интегрирующее звено		$\frac{1}{T} \left[t - T_1(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \right]$			
Идеальное дифференцирующее звено	Kp	$K \cdot \delta(t)$			
Реальное дифференцирующее звено	$\frac{Kp}{Tp + 1}$	$\frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$			
Форсирующее звено	$K(Tp + 1)$	$KT \cdot \delta(t) + K$			

